**Calculs avec les nombres relatifs**



|  |
| --- |
| http://www.maths-et-tiques.fr/images/M_images/Liu-hui-13679.jpgLes premiers à avoir utilisés les nombres négatifs seraient les chinois au **2ème siècle**. On trouve dans l’ouvrage chinois « Jiuzhang suanshu » datant de cette époque des problèmes de la vie courante dont la résolution fait appel aux nombres négatifs. Son auteur, *Liu Hui (220 ; 280)* effectue les calculs à l’aide de baguettes de couleurs ; les rouges représentants les valeurs positifs, les noires les valeurs négatives.  Plus tard au **7ème siècle**, l’indien *Brahmagupta (598 ; 660)* donne des règles de calculs sans les justifier qui permettent de calculer des débits et crédits dans des comptes : « Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette. »  http://www.maths-et-tiques.fr/images/M_images/Cauchy-7552.jpgPlus de 1000 ans seront ensuite nécessaire pour que ces nombres négatifs soient vraiment acceptés. Le mathématicien perse [*Mohammed al Khwarizmi*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/mathematiciens-celebres/al-khwarizmi)*(780 ; 850)*, par exemple, accepte ceux-ci dans ses calculs mais cherche à s’en débarrasser au plus vite et les refuse comme solution de ses calculs. En Occident, c’est seulement au 15ème siècle que le français *Nicolas Chuquet* *(1445 ; 1500)* est un des tout premier à les utiliser. Mais beaucoup d’autres mathématiciens ne les acceptent pas, souvent pour la raison que cela n’a pas de sens de considérer des quantités plus petites que zéro, c’est-à-dire moins que rien !  Fichier:Brahmagupta.jpgIl faudra attendre jusqu’au milieu du 19ème siècle pour que ces nombres négatifs soient acceptés définitivement. C’est **en 1821** que le mathématicien Augustin Louis Cauchy*(1789 ; 1857)* donne la définition que l’on utilise actuellement des nombres relatifs : |

|  |
| --- |
| Un **nombre relatif** est constitué d’un signe et d’une partie numérique appelée aussi distance à zéro. |
| Exemple : (-3) a pour signe « moins » et pour distance à zéro 3. |

**Addition et soustraction**

**1**

Les règles d’addition des nombres relatifs ont été construites par prolongement des règles connues pour les nombres positifs à l’aide d’un axe gradué :

**3 + 2 = 5**

**3**

4

**5**

Ajouter 2 à un nombre positif, c’est se déplacer de 2 vers la droite sur l’axe.

**(-6) + 2 = -4**

**-6**

-5

**-4**

On procède de la même façon lorsqu’ on ajoute 2 à un nombre négatif.

à un nombre négatif.

De même, soustraire un nombre positif à un relatif se fait assez naturellement :

**5 – 2 = 3**

**3**

4

**5**

Retrancher 2 à un nombre positif, c’est se déplacer de 2 vers la droite.

**(-5) – 2 = -7**

**-7**

-6

**-5**

Par prolongement, on enlève de la même façon 2

à un nombre négatif.

Pour additionner ou soustraire des nombres négatifs, nous avons besoin de la définition suivante :

|  |
| --- |
| Deux nombres relatifs qui ne diffèrent que par leur signe sont dit **opposés**. |
| Exemples : (-2) a pour opposé (+2) ; (+6) et (-6) sont opposés. |

Si vous voulez soustraire ou ajouter un nombre négatif, il faut utiliser les deux règles suivantes :

|  |
| --- |
| Soustraire par un nombre relatif, revient à ajouter son opposé. |
| Effectuer (-5) – (-4) revient à calculer (-5) + 4 que nous avons déjà expliqués. |

|  |
| --- |
| Ajouter un nombre relatif, revient à soustraire son opposé. |
| Effectuer (-5) + (-4) revient à calculer (-5) – 4 que nous avons déjà expliqués. |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Exercice type 1** | | |  |  |  |
|  | **A l’aide de l’axe numérique ci-dessous effectuez les calculs demandés :**    **A = 3 – 5 – 2 + 3 B = (-3) + 5 + (-3) – 1 – (-5)**  A = -1 :  B = (-3) + 5 – 3 – 1 + 5 = 3 | | | |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |  | |  |  |

Tout ce qui précède peut aussi se résumer en deux propriétés (vues en cinquième) :

|  |  |
| --- | --- |
| **Addition de nombres relatifs** |  |
| Pour additionner deux nombres relatifs, on garde le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro. Puis, s’ils ont le même signe, on ajoute leur distance à zéro ; sinon on soustrait celles-ci. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **Soustraction de nombres relatifs** |  |
| Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son opposé. | |

|  |
| --- |
| Fahrenheit a construit à l’origine son échelle de température à partir de deux températures de référence : 0 degré Fahrenheit pour la plus basse température qu’il observa pendant un hiver de 1708-1709 et 100 degrés Fahrenheit pour la température du sang d’un cheval. Avec cette échelle, il évitait ainsi qu’on utilise des températures négatives dans la vie de tous les jours – les nombres négatifs n’étant pas encore vraiment acceptés à son époque. Cette unité de mesure est encore très utilisée aux Etats-Unis mais plus du tout dans le monde scientifique. |

**Multiplication et division**

**2**

|  |
| --- |
| Lorsque l'on multiplie ou divise deux nombres relatifs, le signe du résultat est :   * positif si les deux nombres relatifs sont de même signe. * négatif si les deux nombres relatifs sont de signe contraire. |
| Exemples : (- 4) × (- 2) et (- 4) ÷ (- 2) donnent un résultat positif car (- 4) et (- 2) sont du même signe.  (+ 6) × (- 3) et (+ 6) ÷ (- 3) donnent un résultat négatif car (+ 6) et (- 2) ne sont pas du même signe. |

La règle des signes de la multiplication peut paraitre surprenante notamment pour le produit de deux nombres négatifs qui donnent un résultat positif. Voilà une explication à l’aide d’exemples que l’on peut généralisés (voir activité) :

Avec les nombres positifs, on sait que 2 + 2 + 2 = 3 × 2.   
Pour que ce procédé fonctionne avec les nombres négatifs il faut que (-2) + (-2) + (-2) = 3 × (-2)  
Ceci impose donc de choisir que le produit d’un nombre positif par un nombre négatif donne un résultat négatif car (-2) + (-2) + (-2) = -6.

Avec les nombres positifs, on dispose de la règle de la distributivité vue en 5ème  : k (a + b) = ka + kb  
On voudrait que cette règle fonctionne encore avec les nombres négatifs.  
On a alors en utilisant la distributivité : (-2) [ 3 + (-3) ] = (-2) × 3 + (-2) × (-3)  
On peut calculer différemment : (-2) [ 3 + (-3) ] = (-2) × 0 = 0  
Ce qui donne au final : (-2) × 3 + (-2) × (-3) = 0

Comme on vient de choisir que (-2) × 3 est négatif, on est obligé de choisir que (-2) × (-3) est positif.

|  |  |
| --- | --- |
| **Signe d’un quotient ou d’un produit de nombres relatifs** |  |
| Lorsque l’on multiplie et divise plusieurs nombres relatifs, le signe du résultat est :   * positif si il y a une quantité paire de nombres négatifs. * négatif si il y a une quantité impaire de nombres négatifs. | |
| Exemples : (-1) × (-4) × (+ 3) × (- 2) est négatif car il y a 3 nombres négatifs, soit un nombre impair.  est positif car il y a 4 nombres négatifs, soit un nombre pair. | |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Exercice type 2** | | |  |  |  |
|  | **Déterminer les signes des expressions suivantes lorsque cela est possible où *x* désigne un entier relatif quelconque**  **A = (-1)×(-2) ×(-3) × … ×(-99) ×(-100) B = (-1) ×(+2) ×(-3) × … ×(-99) ×(+90) C = (-1) × *x***  A est un produit de 100 facteurs tous négatifs.  100 est un nombre pair donc A est positif.  B est un produit de 90 facteurs dont 45 sont négatifs.  45 est un nombre impair donc B est négatif.  On ne connait pas le signe de *x* donc, on ne peut pas connaitre celui de C. | | | |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |  | |  |  |

|  |
| --- |
| Lorsque l'on multiplie (ou divise) deux nombres relatifs, la distance à zéro du résultat est égale au produit (ou au quotient) des distances à zéro des deux nombres relatifs. |
| (- 4 ) × (- 2) a pour partie numérique 2 × 4 = 8 et (- 4) ÷ (- 2) a pour partie numérique 4 ÷ 2 = 2  (+ 6) × (- 2) a pour partie numérique 6 × 2 = 12 et (+ 6) ÷ (- 2) a pour partie numérique 6 ÷ 2 = 3  Bilan : on a donc (- 4) × (- 2) = + 8 ; (+ 6) × (- 2) = - 12 et (- 4) ÷ (- 2) = 2 ; (+ 6) ÷ (- 2) = -3 |

|  |
| --- |
| On peut utiliser le zéro pour indiquer une place libre dans un système de numération. On fait ainsi la différence entre 105 et 15. Les premiers à utiliser le zéro ainsi furent les Babyloniens **en 300 av. J. C.** (figure à gauche). Pour eux, le zéro n’est pas vraiment un chiffre mais juste un symbole pratique pour bien lire les nombres.  Ce sont les Hindous qui les premiers traiteront le « zéro » comme un véritable nombre. **En 628**, le savant Brahmagupta définit d’ailleurs le zéro comme la soustraction d’un nombre par lui-même et en décrit les propriétés. En Hindou, on utilisait le mot « sunya » (qui signifie « le vide ») pour désigner le zéro. Il fut traduit en arabe par « sifr ». Lorsque le zéro arrive en Occident au **12ème siècle**, Fibonnaci (1170-1250) le nomme « zephirum » qui se transformera progressivement en « zephiro » pour devenir **à partir de 1491** le fameux « zéro ». Le mot « sifr » se transformera lui aussi progressivement pour donner le mot « chiffre » |

**Opérations successives et notation simplifiée**

**3**

Il est possible d’écrire un calcul avec des nombres relatifs en utilisant moins de parenthèses. Pour cela, on a besoin des deux simplifications suivantes :

|  |
| --- |
| Le premier nombre relatif d’un calcul peut s’écrire sans parenthèse. |

|  |
| --- |
| Tout nombre positif peut s’écrire sans parenthèses. |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Exercice type 3** | | |  |  |  |
|  | **Sans faire de calcul, écrire les expressions numériques suivantes sans parenthèse :**  **A = (-3) + (-4) – (+5) + (+7) – (-9) B = (-2)**×**(-4)**×**(+5)**×**(-8)**  A = -3 + (-4) – 5 + 7 – (-9)  *On applique les deux règles ci-dessus.*  *On applique les deux règles (p2) avec les opposés.*  A = -3 – (+4) – 5 + 7 + (+9)  A = -3 – 4 – 5 + 7 + 9  *On applique à nouveau les deux règles ci-dessus.*  B = - 2 × 4 × 5 × 8  *On applique la règle des signes d’un produit.* | | | |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |  | |  |  |

Lorsqu’on calcule une expression numérique avec des nombres relatifs, on doit respecter les priorités opératoires. Ainsi lorsque l’on a le calcul suivant :

A = -2 + 3 – 4 – 5 + 6 + 1 – 9

on devrait effectuer les calculs de gauche à droite. Cependant il existe une façon de modifier cet ordre en procédant ainsi :

A = (-2) + (+3) + (-4) + (-5) + (+6) + (+1) + (-9)

Comme il n’y a que des additions, on peut donc changer l’ordre ;

A = (+3) + (+6) + (+1) + (-9) + (-2) + (-4) + (-5)

On simplifie alors cette écriture :

A = 3 + 6 + 1 – 9 – 2 – 4 – 5

L’opération peut paraitre un peu longue mais on peut aller directement de la première ligne à la dernière en déplaçant chaque nombre avec le signe qui est **devant lui**. Voyons sur un exemple :

B = -1 – 5 – 3 – 2 + 1 + 5 + 4

B = -1 + 1 + 5 – 5 + 4 – 3 – 2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Exercice type 4** | | |  |  |  |
|  | **Modifier l’ordre des calculs de façon astucieuse pour trouver les résultats suivants :**  **A = 5 – 4 + 3 – 7 + 8 B = 3 – 7 + 5 – 8 – 3 – 5 + 7**  A = 5 + 3 + 8 – 4 – 7 = 5  *Il est parfois astucieux de placer en premier tout ce qui est positif ; cela facilite le calcul*  B = 3 – 3 – 7 + 7 + 5 – 5 = 0  *Ici il est pratique de regrouper les opposés pour obtenir des zéros.* | | | |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |  | |  |  |