**Activité : démonstration de la concourance des hauteurs dans un triangle**

ABC est un triangle quelconque et *A’* est le pied de la hauteur issue de *A*.



1. Tracer la droite *(d)* parallèle à [BC] passant par *A*.

Tracer la droite *(Δ)* parallèle à [AC] passant par *B*. Elle coupe *(d)* en un point *D*.
Tracer la droite *(β)* parallèle à [AB] passant par *C*. Elle coupe *(d)* en un point *E* et *(Δ)* en *F*.

1. a) Montrer que *ABCE* et *ADBC* sont des parallélogrammes.

b) En déduire que *AD = AE.*

c) En déduire que *A* est le milieu de *[DE].*

1. Montrer que *(AH)* est la médiatrice de *[DE].*
2. a) Soit *B’* le pied de la hauteur issue de *B*. Placer ce point et tracer cette hauteur.
b) Sans justifier, dire de quel segment cette hauteur *(BB’)* est la médiatrice.
3. a) Soit *C’* le pied de la hauteur issue de *C*. Placer ce point et tracer cette hauteur.
b) Sans justifier, dire de quel segment cette hauteur *(CC’)* est la médiatrice.
4. Montrer que les trois hauteurs du triangle *ABC* sont concourantes.

**Correction**

1. Tracer la droite *(d)* parallèle à [BC] passant par *A*. Tracer la droite *(Δ)* parallèle à [AC] passant par *B*. Elle coupe *(d)* en un point *D*. Tracer la droite *(β)* parallèle à [AB] passant par *C*. Elle coupe *(d)* en un point *E* et *(Δ)* en *F*.



1. a) Montrer que *ABCE* et *ADBC* sont des parallélogrammes.

Par construction, on a *(AE)//(BC)* et *(AB)//(EC),*
Or un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme,
Donc *ABCE* est un parallélogramme.

Par construction, on a *(AD)//(BC)* et *(DB)//(AC),*
Or un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme,
Donc *ADBC* est un parallélogramme.

b) En déduire que *AD = AE.*

*ABCE* et *ADBC* sont des parallélogrammes,

Or les cotés opposés d’un parallélogramme sont de même longueur,

Donc *AD = CB* et *AE = CB,*

D’où *AD = AE.*

c) En déduire que *A* est le milieu de *[DE].*

Les points A, D et E sont alignés car il appartient à la droite (d) et AD = AE

Donc *A* est le milieu de *[DE].*

1. Montrer que *(AH)* est la médiatrice de *[DE].*

On a *(DE)//(BC)* et *(AA’)*$⊥$*(BC),*

Or si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l’une est perpendiculaire à l’autre,

Donc *(AA’)*$⊥$*(DE)*.

De plus *A* est le milieu de *[DE].*

Or la droite perpendiculaire à un segment passant par son milieu est sa médiatrice

Donc *(AH)* est la médiatrice de *[DE].*

1. ****a) Soit *B’* le pied de la hauteur issue de *B*. Placer ce point et tracer cette hauteur.
b) Sans justifier, dire de quel segment cette hauteur *(BB’)* est la médiatrice.

C’est la médiatrice de *[DF].*

1. a) Soit *C’* le pied de la hauteur issue de *C*. Placer ce point et tracer cette hauteur.
b) Sans justifier, dire de quel segment cette hauteur *(CC’)* est la médiatrice.
C’est la médiatrice de *[EF].*
2. Montrer que les trois hauteurs du triangle *ABC* sont concourantes.

*(AA’), (BB’) et (CC’)* sont les médiatrices des côtés du triangle *DEF.*

Or les médiatrices d’un triangle sont concourantes.

Donc *(AA’), (BB’) et (CC’)* sont concourantes.

**\**