Qu’est ce qu’un contre-exemple ?

On peut remarquer que 9^2 s’écrit en écriture décimale avec 2 chiffres : $9\times9 = 81$
9^3 s’écrit en écriture décimale avec 3 chiffres : $9\times9\times9 = 243$
9^4 s’écrit en écriture décimale avec 4 chiffres : $9\times9\times9\times9 = 6561$

On conjecture donc que : « 9^N s’écrit en écriture décimale avec N chiffres ».

En calculant à l’aide du site http://www.wolframalpha.com/ vous pouvez vérifier que la conjecture est aussi vraie pour 9^4, 9^5, 9^6, 9^7, …; 9^{20}, 9^{21} . (Taper 9^20 puis Entrée par exemple)

Mais 9^{22} s’écrit avec seulement 21 chiffres : 984 770 902 183 611 232 881

On dit que 9^{22} est un contre-exemple à la conjecture.

> Un exemple qui montre qu’une conjecture est fausse se nomme **un contre-exemple**.
>
> Un seul contre-exemple suffit à réfuter une conjecture alors que plusieurs millions d’exemples ne suffisent pas à montrer qu’une conjecture est vraie !
>
> Un contre-exemple n’est pas le seul moyen de réfuter une conjecture.

Fermat (1601-1665) avait conjecturé que $2^{2^n}+1$ était un nombre premier pour tout entier n :

Un nombre premier est entier qui n’est divisible que par 1 et lui-même.

Ex : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ….

$2^{2^0}+1 = 2^1+1 = 3$ qui est premier

$2^{2^1}+1 = 2^2+1 = 4+1 = 5$ qui est premier

$2^{2^2}+1 = 2^4+1 = 16+1 = 17$ qui est premier

$2^{2^3}+1 = 2^8+1 = 256+1 = 257$ qui est premier

$2^{2^4}+1 = 2^{16}+1 = 65536+1 = 65537$ qui est premier

Euler

Fermat

Euler trouva un contre-exemple **en 1732** : $2^{2^5}+1 = 4\,294\,967\,297$ qui est divisible par 641

Euler (1707 – 1783) conjectura plus tard **en 1769** qu’on ne pouvait pas trouver 4 entiers pour obtenir l’égalité $a^4+b^4+c^4=d^4$ ni trouver 5 entiers pour obtenir l’égalité $a^5+b^5+c^5+d^5=e^5$ et ainsi de suite. Pendant presque 200 ans, aucun mathématicien ne parvint à prouver cette conjecture, ni à l’infirmer par un contre-exemple.

En 1966, Lander et Parkin, à l’aide d’un ordinateur CDC 6600, trouvent le contre-exemple : $27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$

En 1988, Elkies (photo à gauche) montre que :

$2\,682\,440^4+15\,365\,639^4+18\,796\,760^4=20\,615\,673^4$

Par contre pour n≥5, aucun contre-exemple n’a encore été trouvé.

Si vous vous êtes intéressé à l’encadré ci-dessus, vous avez pu remarquer que parfois des conjectures très fortes peuvent finalement s’avérer fausses.