Qu’est ce qu’un contre-exemple ?

© www.automaths.com

Un exemple qui montre qu’une conjecture est fausse se nomme un contre-exemple

Un élève pense que pour additionner deux fractions entres elles, il suffit d’ajouter les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Pour lui, – – —. Afin de le convaincre que sa règle est fausse, son professeur lui donne le contre-exemple suivant : – – — — – – – –

Un seul contre-exemple suffit à réfuter une conjecture alors que plusieurs millions d’exemples ne suffisent pas à montrer qu’une conjecture est vraie !

Un contre-exemple n’est pas le seul moyen de réfuter une conjecture.

Fermat (1601-1665) avait remarqué que $2^{2^n} + 1$ était premier pour n entier entre 0 et 4.

$2^{2^0} + 1 =$ **3** qui est premier

$2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 =$ **5** qui est premier

$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 =$ **17** qui est premier

$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 256 + 1 =$ **257** qui est premier

$2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65536 + 1 =$ **65537** qui est premier

Il a donc conjecturé que cette règle était vraie pour toutes les valeurs de n …

Euler qui trouva un contre exemple en 1732 : $\mathbf{2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297}$

4 294 967 297 n’est pas premier car il est divisible par 641.

Euler (1707 – 1783) conjectura plus tard en 1769 qu’on ne pouvait pas trouver 4 entiers pour obtenir l’égalité $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ ni trouver 5 entiers pour obtenir l’égalité $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = e^5$ et ainsi de suite

Pendant presque 200 ans, aucun mathématicien ne parvint à prouver cette conjecture, ni à l’infirmer par un contre exemple.

1966 : $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$ (Lander et Parkin)

1988 : $2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4$ (Elkies)

Par contre pour n≥5, aucun contre-exemple n’a encore été trouvé …