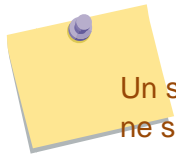


## Un exemple qui montre qu'une conjecture est fautive se nomme un contre-exemple

Un élève pense que pour additionner deux fractions entre elles, il suffit d'ajouter les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Pour lui,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$ . Afin de le convaincre que sa règle est fautive, son professeur lui donne le contre-exemple suivant :  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



Un seul contre-exemple suffit à réfuter une conjecture alors que plusieurs millions d'exemples ne suffisent pas à montrer qu'une conjecture est vraie !

Un contre-exemple n'est pas le seul moyen de réfuter une conjecture.



Fermat (1601-1665) avait remarqué que  $2^{2^n} + 1$  était premier pour n entier entre 0 et 4.



$$2^{2^0} + 1 = 3 \text{ qui est premier}$$

$$2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \text{ qui est premier}$$

$$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17 \text{ qui est premier}$$

$$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 256 + 1 = 257 \text{ qui est premier}$$

$$2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65536 + 1 = 65537 \text{ qui est premier}$$

Il a donc conjecturé que cette règle était vraie pour toutes les valeurs de n ...

Euler qui trouva un contre exemple en 1732 :  $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$   
**4 294 967 297 n'est pas premier car il est divisible par 641.**

Euler (1707 – 1783) conjectura plus tard en 1769 qu'on ne pouvait pas trouver 4 entiers pour obtenir l'égalité  $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$  ni trouver 5 entiers pour obtenir l'égalité  $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = e^5$  et ainsi de suite  
Pendant presque 200 ans, aucun mathématicien ne parvint à prouver cette conjecture, ni à l'infirmer par un contre exemple.



$$1966 : 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5 \text{ (Lander et Parkin)}$$

$$1988 : 2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4 \text{ (Elkies)}$$

Par contre pour  $n \geq 5$ , aucun contre-exemple n'a encore été trouvé ...