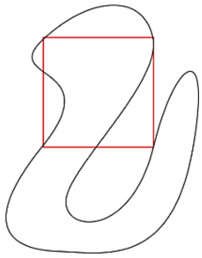
Qu'est ce qu'une conjecture ?

En mathématiques, **une conjecture** est une affirmation que l'on pense juste mais que personne n'a encore pu démontrer, ni réfuter.

On ne peut pas utiliser une conjecture dans une preuve car une conjecture peut être fausse.

Il y a beaucoup d'exemples de conjectures mathématiques dont l'énoncé est simple.



Conjecture de Toeplitz (1911) : dans toute courbe fermée, on peut trouver quatre points qui forme un carré.

Conjecture d'Erdős-Straus (1948) : toute fraction de la forme $\frac{4}{n}$, avec *n* entier supérieur ou égal à 2, peut s'écrire comme somme de 3 fractions de la forme $\frac{1}{x}$

Réfuter une conjecture, c'est prouver qu'elle est fausse.

Démontrer une conjecture, c'est prouver qu'elle est vraie.

Si une conjecture est démontrée, elle devient un théorème.

En 1844, Eugène Catalan conjecture que deux nombres consécutifs ne sont jamais tous les deux des puissances d'entier sauf 8 et 9.

En 2003, Pedra Mihailescu (photo ci-contre) démontre cette conjecture.

Une puissance d'entier est un nombre de la forme $a^n = \underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n\ facteurs}$ *; par exemple* $5^3 = 5 \times 5 \times 5$

Les premiers nombres puissances d'entiers sont : 1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 36, 49, 64, 81, 100, …

On préfère de loin un résultat prouvé à un résultat conjecturé mais <u>conjecturer est beaucoup mieux que de ne rien proposer</u>. Alors n'hésitez pas à le faire ! Mais attention lorsque vous faites une conjecture à le préciser clairement : « je conjecture que », « il me semble que », …

En 1647, Fermat affirme avoir démontré qu'on ne peut pas trouver que pour les entiers a, b, c et n avec $n \geq 3$ alors $a^n + b^n \neq c^n$. On n'a jamais retrouvé sa preuve. On doit donc considérer qu'il s'agit d'une conjecture.

En 1996, Andrew Wiles (photo ci-contre) la démontre. Cette conjecture devient alors « le théorème de Fermat-Wiles ». Vous observerez que les mathématiciens garde le nom de Fermat pour nommer ce théorème … Avoir de bonnes idées est aussi une qualité reconnue par les mathématiciens.

Même si un très grand nombre d'exemples vérifient une conjecture, cela ne permet pas de dire que cette conjecture est vraie. On dira seulement que la conjecture est **forte**.

En 1742, dans une lettre (ci-contre) à Euler, Chris Goldach conjecture que tout entier pair est la somme de deux nombres premiers. Par exemple 18 = 7 + 11 et 38 = 19 + 19.

Un nombre premier est entier qui n'est divisible que par 1 et lui-même.
Ex : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, …

En 2013, aucun mathématicien n'a réussi à la réfuter ou à la démontrer. On sait que la conjecture est très forte, car vérifiée pour tous les entiers de 1 jusqu`à $4 \times 10^{18} = 4\,000\,000\,000\,000\,000\,000$. Olivier Ramaré a, ceci dit, prouver en 1995 que tout entier pair est la somme d'au plus six nombres premiers.

Le petit encadré historique ci–dessus montre que les ordinateurs peuvent être très utiles en mathématiques pour renforcer des conjectures.

Il existe aussi en mathématiques **des problèmes ouverts**, qui sont des questions dont on ne connait pas la réponse, ni avons de conjecture précise à émettre.

Le **problème du sofa** est un problème mathématique inventé par le mathématicien Leo Moser **en 1966**. Il s'agit de trouver le sofa d'aire maximale que l'on peut déplacer en le glissant dans un couloir d'un mètre de large avec un angle droit. Le problème n'est pas encore résolu.

Le **problème du cercle** de Gauss (1777-1855) est un problème de mathématiques **du début du 19ème siècle** encore non résolu. Il consiste à considérer un cercle tracé sur un quadrillage et à pouvoir prévoir combien de nœuds du quadrillage sont dans le cercle.