Activité : Comprendre les règles de calculs avec les nombres relatifs
Partie I : addition et soustraction

E. Suquet, esuquet@automaths.com

Les nombres négatifs ont très longtemps posé de grosses difficultés aux mathématiciens et penseurs.

« Pour obtenir réellement une quantité négative […], il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative […]? »

Lazare Carnot (1753-1823), mathématicien français

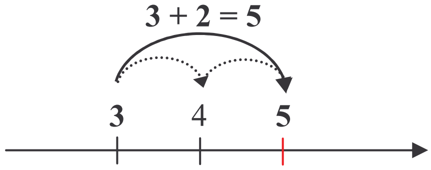
En Europe, les nombres négatifs font leur apparition au XV$^{\text{ème}}$ siècle. Jusqu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle ils ne seront en fait pas vraiment acceptés comme des nombres. Ils seront plutôt considérés comme des outils pratiques pour résoudre des équations mais qui n'ont pas vraiment de sens (voir exercice 4)

Dès que ces nombres négatifs ont commencé à être tolérés, on a cherché à les additionner, les soustraire, les multiplier et les diviser entre eux. Ces règles opératoires ont été construites progressivement en prolongement des règles sur les positifs. On ne cherchait pas à les rattacher au réel mais à les définir de façon logique.

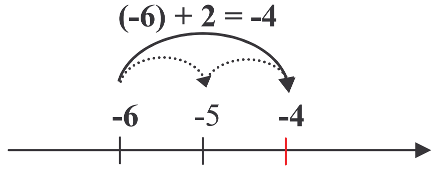
Exercice 1 : Addition d'un nombre positif

Sur le graphique de gauche, on ajoute 2 à un nombre positif.
Par prolongement, on en déduit comment ajouter 2 à un nombre négatif :

3 + 2 = 5

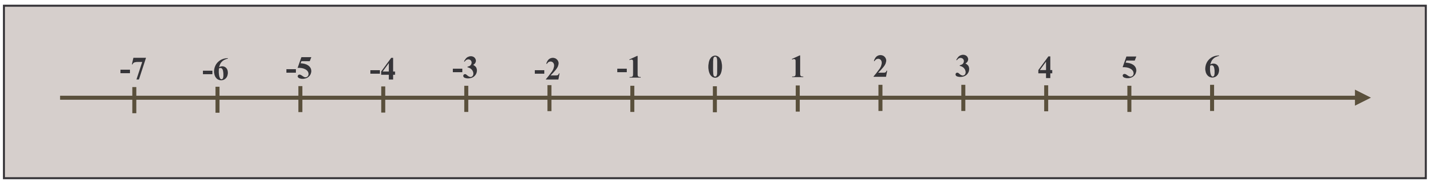


(-6) + 2 = -4



Effectuez maintenant les calculs suivants :

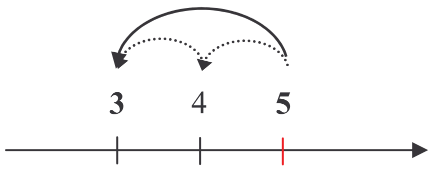
(- 3) + 7 = ___	**(- 8) + 2 =** ___	**(- 5) + 5 =** ___	**(- 1) + 4 =** ___
-3 + 9 = ___	**(- 9) + 4 =**___	**-3 + 2 =** ___	**(- 7) + 7 =** ___
-5 + 7 = ___	**-3 + 3 =** ___	**-3 + 1 =** ___	**-10 + 1 =** ___



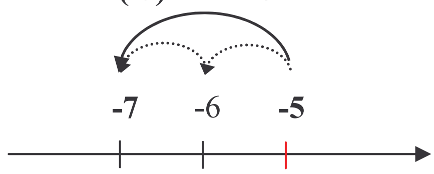
Exercice 2 : Soustraction d'un nombre positif

Sur le même principe que l'exercice 1 on déduit par prolongement comment soustraire 2 à un nombre relatif :

3 – 2 = 1



(-5) – 2 = -7



Effectuez maintenant les calculs suivants :

(- 3) – 7 = ___	**(- 8) – 2 =** ___	**(- 5) – 5 =** ___	**(+ 2) – 4 =** ___
3 – 9 = ___	**(+ 9) – 4 =**___	**-3 – 2 =** ___	**(- 7) – 7 =** ___
4 – 7 = ___	**-3 – 3 =** ___	**-3 – 1 =** ___	**-10 – 1 =** ___

Exercice 3 : Addition et soustraction de deux nombres relatifs

a) Dans les deux tableaux, complétez d'abord le cadre à droite **en noir** (soustraction ou addition d'un nombre positif comme vu à l'exercice 1)
b) Complétez ensuite **en bleu** le cadre à gauche par prolongement sans faire de calcul.

+	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3							
-2							
-1							
0							
1							
2							
3							

–	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3	0						
-2		0					
-1			0				
0				0			
1					0		
2						0	
3							0

Les exercices 1, 2 et 3 permettent de comprendre comment par prolongement on peut faire des additions et des soustractions avec les nombres relatifs. Pour plus de facilité, on a cherché ensuite à énoncer des règles pour ne pas avoir besoin de passer par des tableaux pour effectuer ces calculs. Ce sont les règles que l'on vous a données en cinquième.

Exercice 4 : Expression écrite

Rédiger sur votre cahier les règles d'addition et de soustraction de deux nombres relatifs.

L'essentiel à retenir pour le moment est :

- qu'il est tout à fait normal que les nombres relatifs vous posent des difficultés puis qu'ils en ont posées d'importantes aux mathématiciens jusqu'au XIX^{ème} siècle.
  C'est avec de l'entraînement que ces opérations vous deviendront plus familières.

- qu'il faut essayer d'accepter par exemple que -2 – (- 3) = 1.
  Il y a des signes moins partout et on obtient un résultat positif !!!
  Rappelez vous que les règles de calculs sont construites par prolongement des calculs sur les nombres positifs et qu'il ne faut donc pas forcement chercher un rapprochement avec le monde réel pour comprendre un résultat.

Activité : Comprendre les règles de calculs avec les nombres relatifs
Partie II : multiplication de nombres relatifs

E. Suquet, esuquet@automaths.com

Pour établir les règles de la multiplication Mac Laurin propose en 1748 une méthode qui part des connaissances que l'on a sur les nombres positifs. Mac Laurin ne cherche pas du tout à donner du sens à cette règle, il cherche à la formuler par déduction logique.

Etape 0 : mise en place

Avant de découvrir sa méthode, il nous faut réviser un point que vous avez vu en 5ème : la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication.

$$\mathbf{a \times (b + c) = a \times b + a \times c} \qquad \mathbf{a \times (b - c) = a \times b - a \times c}$$

A vous maintenant de complétez :

a) $2 (5 - x) = 2 \times$ ___ $-$ $2 \times$ ___ $=$ ___ $-$ ___

b) $7 (5 - 3x) =$ ________

c) ___ $(y + 5) = 4y +$ ___

d) $6 ($ ___ $+$ ___ $) = 6x + 12y$

e) $x (2 + 3y) =$ ________

f) ___ $($ ___ $+$ ___ $) = 2x + 4$

g) $5 (3x - 5y) =$ ________

h) $n ($ ___ $+ p) =$ ___ $+ nt$

Etape 1 : multiplication de deux nombres positifs

C'est parti ! Commençons par une question simple.

Le produit de deux nombres positifs est un nombre ? Positif Négatif

Etape 2 : multiplication d'un nombre négatif par un nombre positif

Dans tout le reste de l'activité a et n désignent des nombres positifs

On a donc : $a + (-a) =$ ____

Calculons maintenant de deux façons $n [a + (-a)]$:

$n [a + (-a)] = n \times$ ___ $=$ ___

$n [a + (-a)] =$ ___ $\times$ ___ $+$ ___ $\times$ ___

En comparons les deux résultats ont obtient donc : ___ $\times$ ___ $+$ ___ $\times$ ___ $=$ ___

$n \times a$ et $n \times (-a)$ sont donc ___________ puisque leur somme est nulle.

$n \times a$ est ________ puisque l'on multiplie deux nombres positifs.

Donc en déduit que $n \times (-a)$ est ________

Comme n est ________ et $(-a)$ est ________, on peut donc conclure que :

Le produit d'un nombre positif par un nombre négatif est un nombre ________

Etape 3 : multiplication de deux nombres négatifs

On se souvient que $a + (-a) = 0$

Calculons maintenant de deux façons $(-n)\ [\ a + (-a)\ ]$:

$(-n)\ [\ a + (-a)\ ] =$ ___ × ___ = ___

$(-n)\ [\ a + (-a)\ ] =$ ___ × ___ + ___ × ___

On a donc ___ × ___ + ___ × ___ = ___

$(-n) \times a$ et $(-n) \times (-a)$ sont donc ________ puisque leur somme est nulle.

$(-n) \times a$ est ________ puisque l'on multiplie un nombre positif par un nombre négatif.

Donc en déduit que $(-n) \times (-a)$ est ________

Comme $(-n)$ est ________ et $(-a)$ est ________, on peut donc conclure que :

Le produit de deux nombres négatifs est un nombre ________

En résumé, on peut donc dire que :
- **le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif.**
- **le produit de deux nombres relatifs de signe différent est négatif.**

Comme on vient de le voir, il est donc possible d'étendre les règles de la multiplication avec les nombres positifs aux nombres négatifs. C'est pratique mais cela ne nous donne pas vraiment un sens concret aux résultats que donne la multiplication de deux nombres négatifs par exemple.

Mais est-ce si important que ça ?

C'est le mathématicien Hankel qui va contribuer à apporter la réponse vers la fin du XIX^ème^ siècle. Il va en fait considérer les nombres comme des êtres mathématiques indépendants (qui ont certaines relations entre eux) mais qui n'ont pas forcement à être reliés à une réalité physique pour exister.
Hankel accepte donc sans aucun problème que $(-3)^2 > (2)^2$ car ce résultat est cohérent et peu importe que cela choque les idées reçues…

Et voila la petite histoire des nombres relatifs, commencée à la fin du XV^ème^ siècle et qui s'achève 400 ans plus tard ! J'espère qu'il ne vous faudra pas autant de temps pour maîtriser cette leçon ☺ ☺ ☺

Source pour l'aspect historique ce document : http://nti.educa.rcanaria.es/penelope/confnomneg.htm

Activité : Comprendre les règles de calculs avec les nombres relatifs
Partie III : quotient de deux nombres relatifs

E. Suquet, esuquet@automaths.com

1) Calculer les produits et en déduire les quotients qui en découlent :

- $2 \times 9 = \ldots$ donc $\dfrac{\ldots\ldots}{2} = \ldots\ldots$ et $\dfrac{\ldots\ldots}{9} = \ldots\ldots$
- $4 \times (-7) = \ldots\ldots$ donc $\dfrac{\ldots\ldots}{4} = \ldots\ldots$ et $\dfrac{\ldots\ldots}{-7} = \ldots\ldots$
- $(-3) \times 8 = \ldots\ldots$ donc $\dfrac{\ldots\ldots}{-3} = \ldots\ldots$ et $\dfrac{\ldots\ldots}{8} = \ldots\ldots$
- $(-5) \times (-6) = \ldots\ldots$ donc $\dfrac{\ldots\ldots}{-5} = \ldots\ldots$ et $\dfrac{\ldots\ldots}{-6} = \ldots\ldots$

2) En utilisant ce qui précède, essayer de deviner les règles pour le signe du quotient de deux nombres :

Le quotient de deux nombres de même signe est ________.

Le quotient de deux nombres de signes contraires est ________.

3) Essayer de prouver ces règles sans utiliser d'exemples.

4) Calculer : $A = \dfrac{56}{-8}$; $B = -\dfrac{121}{11}$; $C = \dfrac{-9}{-18}$; $D = (-6) : (-12)$

Activité : Comprendre les règles de calculs avec les nombres relatifs
Partie III : quotient de deux nombres relatifs

E. Suquet, esuquet@automaths.com

1) Calculer les produits et en déduire les quotients qui en découlent :

- $2 \times 9 = \ldots$ donc $\dfrac{\ldots\ldots}{2} = \ldots\ldots$ et $\dfrac{\ldots\ldots}{9} = \ldots\ldots$
- $4 \times (-7) = \ldots\ldots$ donc $\dfrac{\ldots\ldots}{4} = \ldots\ldots$ et $\dfrac{\ldots\ldots}{-7} = \ldots\ldots$
- $(-3) \times 8 = \ldots\ldots$ donc $\dfrac{\ldots\ldots}{-3} = \ldots\ldots$ et $\dfrac{\ldots\ldots}{8} = \ldots\ldots$
- $(-5) \times (-6) = \ldots\ldots$ donc $\dfrac{\ldots\ldots}{-5} = \ldots\ldots$ et $\dfrac{\ldots\ldots}{-6} = \ldots\ldots$

2) En utilisant ce qui précède, essayer de deviner les règles pour le signe du quotient de deux nombres :

Le quotient de deux nombres de même signe est ________.

Le quotient de deux nombres de signes contraires est ________.

3) Essayer de prouver ces règles sans utiliser d'exemples.

4) Calculer : $A = \dfrac{56}{-8}$; $B = -\dfrac{121}{11}$; $C = \dfrac{-9}{-18}$; $D = (-6) : (-12)$